МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XXIII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг на олимпиадата по астрономия
27 юни 2020 г.
Възрастова група IX-X клас – решения

1 задача. Венера и Плеядите. В началото на април 2020 г. имахме възможността да наблюдаваме много красив небесен спектакъл на вечерното небе. Между 2 и 4 април планетата Венера премина видимо през разсеяния звезден куп Плеяди.

На изображението, с което разполагате, са показани положенията на Венера в няколко последователни дати. Като използвате това изображение:

- А) Определете приблизително в каква конфигурация спрямо Земята и Слънцето е била Венера по време на съединението си с Плеядите.
- Б) Нарисувайте максимално точно как Венера би изглеждала, погледната с достатъчно мощен телескоп (с който можем ясно да различим фазата ѝ) на 31-ви март. Обърнете внимание на всички възможни детайли.
- В) Пресметнете на коя дата ще бъде следващото горно съединение на Венера.

Приемете, че орбитите на Земята и Венера са кръгови и лежат в една равнина.
Радиусът на орбитата на Венера е 0.72 AU.

Решение:

А) 1. На 31 март Слънцето се намира в съзвездието Риби. В този момент, то е в точка от еклиптиката, разположена приблизително на 10˚ източно от пролетната равноденствена точка. Известно е, че звездният куп Плеяди също се наблюдава много близо до равнината на еклиптиката. Слънцето се намира най-близо до купа приблизително в средата на месец май (*най-точно – 20 май, но такава точност не може да се изисква при решаването на тази задача. Може да се съобрази, че ректасцензията на Плеядите е около 4h. Тъй като точката на лятното слънцестоене е с ректасцензия 6h, то Слънцето преминава „покрай“ Плеядите приблизително 1/12 от годината или един месец преди слънцестоенето. Такъв начин на разсъждение би следвало да се приеме за верен.*). Следователно, Венера се намира много близо до точката от еклиптиката, в която Слънцето ще бъде след приблизително 45-50 денонощния, защото това е времевият интервал между 31-ви март и 15/20 май.

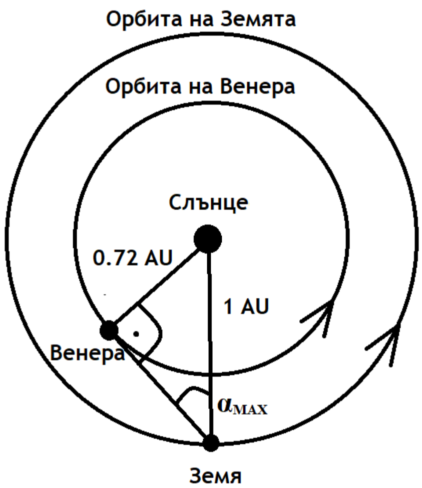
Слънцето се придвижва по еклиптиката с ъглова скорост приблизително равна на 1°/денонощие (по-точно 0.985°). Оттук правим извода, че Венера отстои на малко повече от 45˚ източно от Слънцето. Следователно Венера е много близо до своята максимална източна елонгация.

2. Освен това е известно, че Плеядите се намират в съзвездието Бик, а Слънцето е в Риби. (При това пролетната равноденствена точка е в западната половина на Риби.) А между тях има цяло зодиакално съзвездие – Овен, макар то да е от малките по размери съзвездия. Следователно ъгловото разстояние между Слънцето и Венера е съществено над 30°, най-вероятно над 40°, което също така подсказва, че Венера е близо до максимана източна елонгация.

3. Ако Венера е близо до максимална източна елонгация, нейното движение относно звездите, успоредно на еклиптиката, трябва да се осъществява с ъглова скорост, която е близка до ъгловата скорост на Слънцето по еклиптиката в този период от годината. Около равноденствията видимото движение на Слънцето е близко до средното. Добра оценка на средното движение на Слънцето по еклиптиката ще получим, като разделим 360° на 365.25 (броя на дните в юлианската година). Получаваме, че средното движение на Слънцето по еклиптиката е 0.9856 градуса на денонощие. Използваме размера на приложената карта за да пресметнем нейния линеен мащаб или разстоянието между два деклинационни кръга, между които ректасцензията се променя с 10 часови минути (в този случай не трябва да забравиме да умножим

разликата в ректасцензиите по *cosδ*, където *δ* = 24° е деклинацията на центъра на картата). За мащаба получаваме, че е 1.442 дъгови минути на милиметър. Измерваме средното разстояние между положенията на Венера в милиметри. Получаваме, че то е 38 мм, което отговаря на отместване 0.913°. Виждаме, че тази стойност е близка до средното движение на Слънцето, но все пак е малко по-ниска. Следователно при своето видимо движение Венера бавно се приближава към Слънцето. Причината за това е, че максималната елонгация на Венера е била на 22 април и Венера вече започва да се движи към долно съединение. Все пак разликата в скоростите е малка и планетата очевидно, е близо до максималната си източна елонгация.

4. Най-добре е, обаче, да се използва информацията от самата карта, дадена в приложенията. От нея може да се определят координатите на Венера, примерно на 31 март. След като направим необходимите измервания получаваме, че ректасцензията на Венера е равна на $3^h\ 37^m.5 = 3^h.625 = 54°.375$. Ние не знаем точно датата на пролетното равноденствие, но 2020 година е високосна и разумно предположение е, че равноденствието е на 20 март. До 31 март са изминали 11 денонощия. Вечеполучихме оценката, според която по това време средното движение на Слънцето по еклиптиката е 0.9856 градуса на денонощие. За 11 денонощия Слънцето ще измине приблизително 10°.8. Изваждаме ректасцензията на Слънцето от ректасцинзията на Венера и получаваме, че разликата в ректасцензиите е $\Delta\alpha \approx 43^o.6$. Ние, обаче, търсим ъгловото разстояние по еклиптиката. Получава се сферичен правоъгълен триъгълник, с ъгъл при върха по-малък от $23^o.5$(Слънцето се е отдалечило от пролетната равноденствена точка на около 11 градуса). Не е възможно да го решим точно със средствата с които се предполага че разполагаме, но е ясно, че разстоянието по еклиптиката е „хипотенузата“ на триъгълника и трябва да бъде по-голямо от $\Delta\alpha$. Поне с 2-3 градуса. Следователно Венера се намира от Слънцето на около 45.5 – 46.5 градуса и е близо до източна елонгация.



На схемата е показано взаимното разположение на Слънцето, Земята и Венера при такава конфигурация. От чертежа следва, че за ъгъла на който Венера видимо отстои от Слънцето, гледана от Земята в този момент, е изпълнено съотношението:

$$\sin(\alpha_{MAX}) = \frac{0.72\ AU}{1\ AU} => \alpha_{MAX} \approx 46^\circ$$

Оттук заключаваме, че действително Венера е много близо до максимална източна елонгация.

Реалната дата на максималната източна елонгация е 25 март 2020г. т.е. само шест дни преди 31-ви март. Именно затова и ъгловото отстояние между Венера и Слънцето е много близко до максималното възможно.

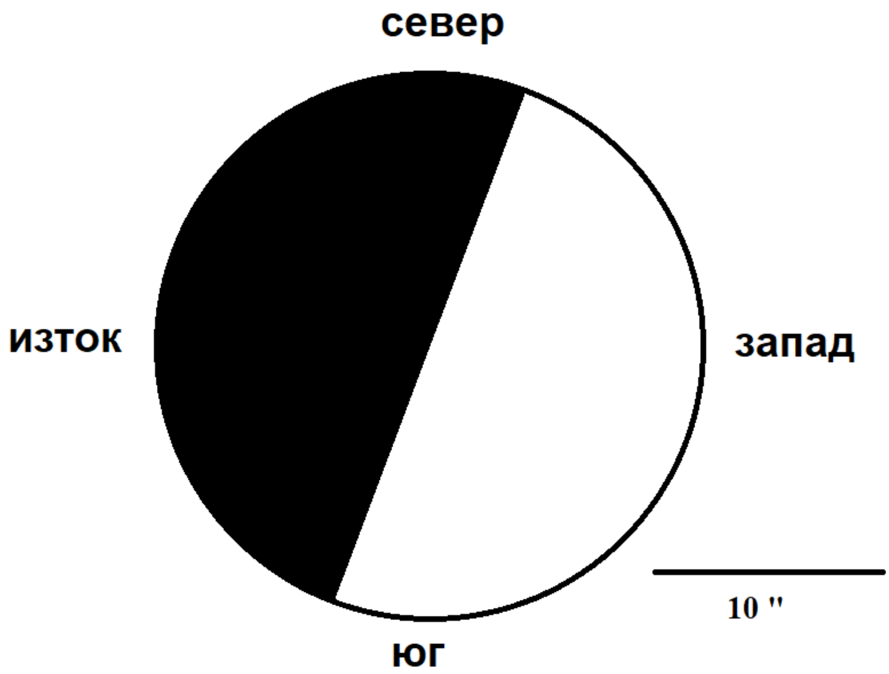
Б) От горната схема е видно, че по време на максимална елонгация разстоянието между Земята и Венера е:

$$r = \sqrt{1\ \mathrm{AU}^2 - 0.72\ \mathrm{AU}^2} \approx 0.69\ \mathrm{AU}$$

Да означим с D диаметъра на Венера. Нейният видим ъглов размер в максимална елонгация е:

$$\delta = \frac{D}{r} \approx 24''$$

В такава конфигурация дискът на Венера изглежда на половина огрят от Слънцето, защото слънчевите лъчи, падащи върху Венера, са перпендикулярни на зрителния лъч от Земята към планетата. Ако погледнем Венера с достатъчно голям телескоп, тя ще изглежда както е показано на следващата фигура.



Терминаторът на Венера е наклонен спрямо меридиана (линията север-юг), защото Слънцето има по-малка деклинация от тази на Венера. *Точната стойност на ъгъла на наклон, разбира се, не се изисква при решаването на задачата*.

В) Първо ще намерим сидеричния период на Венера T_{SID}. Съгласно третия закон на Кеплер:

$$\frac{0.72\text{AU}^3}{T_{SID}^2[\text{години}]} = 1$$

Оттук намираме, че $T_{SID} \approx 223$ d.

Ако орбиталният период на Земята е $T_З$ = 365 d, то синодичният период на Венера е:

$$\frac{T_З T_{SID}}{T_З - T_{SID}} \approx 573\ \text{d}$$

В отправна система, която е неподвижно свързана със системата Земя-Слънце, за един синодичен период, Венера изминава 360˚ по своята орбита. Следващата конфигурация, след максималната източна елонгация е долно съединение. Следват: максимална западна елонгация и горно съединение.

Оттук следва, че в тази отправна система до следващото горно съединение, Венера трябва да измине дъга от своята орбита, на която съответства централен ъгъл:

$$\beta = 180^\circ + (90^\circ - \alpha_{MAX}) = 270^\circ - \alpha_{MAX}.$$

Това означава, че времето, което ще измине от преминаването на Венера през Плеядите до следващото горно съединение е:

$$t = \frac{\beta}{360^\circ}\mathrm{T}_{SIN} \approx 356\ \mathrm{d}$$

Следователно горното съединение ще настъпи на 22 март 2021г. *(Действителната дата е 26 март 2021г.)*

<u>Критерии за оценка (общо 15 т.):</u>

А) *(Общо – 6т.)Обосновка на идеята, че Венера е в максимална източна елонгация – едно от четирите решения (като за второто решение се дават – 4 точки.)*

Точките се разпределят според избрания начин на решение на задачата.

Б) *(Общо – 4т.) Съобразяване на фазата – 2т.*

Правилна схема и ориентация на венерианския терминатор – 2т.

В *(Общо – 5т.)*

За намиране на сидеричния и синодичния период на Венера – 1т.

Правилни геометрични съображения относно дъгата, която Венера трябва да измине до следващото горно съединение – 2т.

Правилен израз и вярна стойност за търсената дата – 2т.

(Възможно е ученикът да е направил грешка в А) подусловие и да е получил, че Венера е в максимална западна елонгация. Това неминуемо ще доведе до неверни резултати в тази част на задачата. Ако обаче всички разсъждения в това подусловие са правилни и грешният резултат произтича ***само*** *от предварително направени грешки, то би следвало да се присъдят максимален брой точки.)*

2 задача. Плутон и неговата свита. По ирония на съдбата, планетата джудже Плутон, която беше декласирана като равноправна планета от Слънчевата система, притежава богата колекция от спътници. Най-големият спътник, Харон, е само два пъти по-малък от Плутон и по същество двете тела представляват двойна планета. Освен това, около Плутон са открити още 4 по-малки спътника: Стикс, Никта, Цербер и Хидра. Харон и Плутон са приливно заключени, т.е. периодът на околоосното им въртене е равен на периода на движението по орбитите им около общия център на масите. Периодите на по-малките спътници се намират в орбитален резонанс с Харон. Ако приемем периода на Харон за единица, приблизителното отношение на периодите на спътниците на Плутон е 1:3:4:5:6. Всички спътници се движат в равнината на екватора на Плутон в една и съща посока.

Вие сте космически глациолог – изучавате ледовете на Плутон и извършвате дистанционно наблюдение на ледените полета на Харон. Работната ви станция се намира в центъра на видимата от Харон страна на Плутон. Харон за вас е точно в зенита.

- А) Ако в даден момент всичките пет спътника на Плутон се наредят в една линия, от едната страна на Плутон, колко спътника ще виждате? След колко време това подреждане ще се повтори, ако орбиталните резонанси са съвсем точни?
- Б) Вие си мечтаете да видите как Слънцето се скрива зад Харон и настъпва пълно слънчево затъмнение. Каква е максималната продължителност на пълната фаза на слънчево затъмнение, наблюдавано от Плутон? Колко пълни слънчеви затъмнения е възможно да видите за една плутонианска година?

Приемете, че орбитата на Плутон е кръгова.

Справочни данни:

Период на околоосно въртене на Плутон – $6^{d}.38723$

Период на орбиталното движение на Плутон – 90553^{d}

Голяма полуос на орбитата на Плутон – 39.482 au (астрономически единици)

Астрономическа единица – 1.496×10^{8} km

Наклон на екваториалната равнина на Плутон към равнината на орбитата му – 57º.47
Разстояние между Плутон и Харон – 19571 km
Радиус на Плутон – 1188.3 km
Радиус на Харон – 606 km

Решение:

А) Харон и Плутон са приливно заключени и това означава, че ако ние се намираме в глациоложката космическа база на Плутон, Харон ще остава в зенита за нас през цялото време. Съотношението на орбиталните периоди на спътниците показва, че най-кратък период има Харон. Съгласно III закон на Кеплер оттук следва, че този спътник е най-близо до Плутон. Знаем също така, че Харон е и най-големият спътник на Плутон, като размерите му значително превишават размерите на останалите спътници. Ако всички спътници се наредят в една линия, от едната страна на Плутон, то ние ще виждаме само Харон, който ще закриво всички останали.

Съотношението на орбиталните периоди на спътниците е 1:3:4:5:6. Най-малкото общо кратно на тези числа е равно на 60. Следващото такова подреждане на спътниците ще се случи след 60 орбитални периода на Харон, които са равни на периода на околоосно въртене на Плутон, или след $6^d.38723 \times 60 \approx 383$ дни.

Б) За да определим максималната продължителност на пълната фаза на слънчево затъмнение, първо ще намерим видимите ъглови диаметри на Харон и на Слънцето, гледани от Плутон. Ако δ_C е видимият ъглов диаметър на Харон, D_C е линейният му диаметър, а r_C е радиусът на неговата орбита около Плутон, то:

$$\delta_C = \frac{D_C}{r_C - R_{Pl}}$$

където R_{Pl} е радиусът на Плутон. Ние изваждаме този радиус от разстоянието между центровете на Плутон и Харон, защото ни е нужно разстоянието между Харон и глациоложката база, а тя се намира на повърхността на Плутон. По-нататък пресмятаме:

$$\delta_C \approx 0.06593 \text{ rad} \approx 3.778°$$

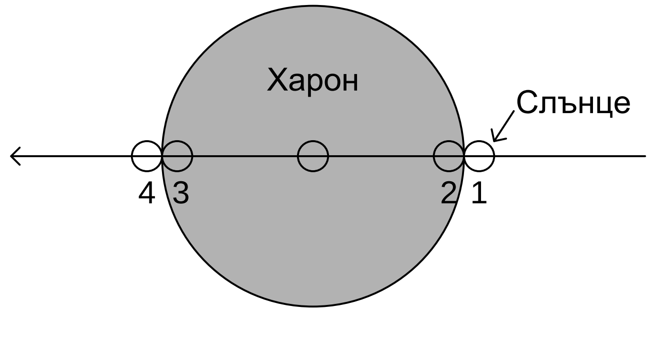
За видимия ъглов диаметър на Слънцето намираме:

$$\delta_S = \frac{D_S}{r_S}$$

където D_S е линейният диаметър на Слънцето, а r_S е разстоянието от Плутон до него.

$$\delta_S \approx 0.0002357 \text{ rad} \approx 0.0135° \approx 48.61''$$

Слънчевото затъмнение от Харон ще изглежда както е показано на фигурата по-долу. При положението на Слънцето, отбелязано с 1 ще започне частичната фаза, а при положение 2 – пълната фаза на затъмнението. Пълната фаза ще приключи при положение 3, а при положение 4 ще завърши и частичната фаза на затъмнението.



Продължителността на пълната фаза ще се определя от времето, за което Харон ще се завърти по своята орбита около Плутон на ъгъл, съответстващ на разстоянието от центъра на видимия слънчев диск в точка 2 до точка 3, който ще бъде:

$$\alpha = \delta_C - \delta_S \approx 3.7645°$$

Ако T_0 е периодът на околоосно въртене на Плутон, който е равен и на орбиталния период на Харон, то продължителността на пълната фаза на затъмнението ще бъде:

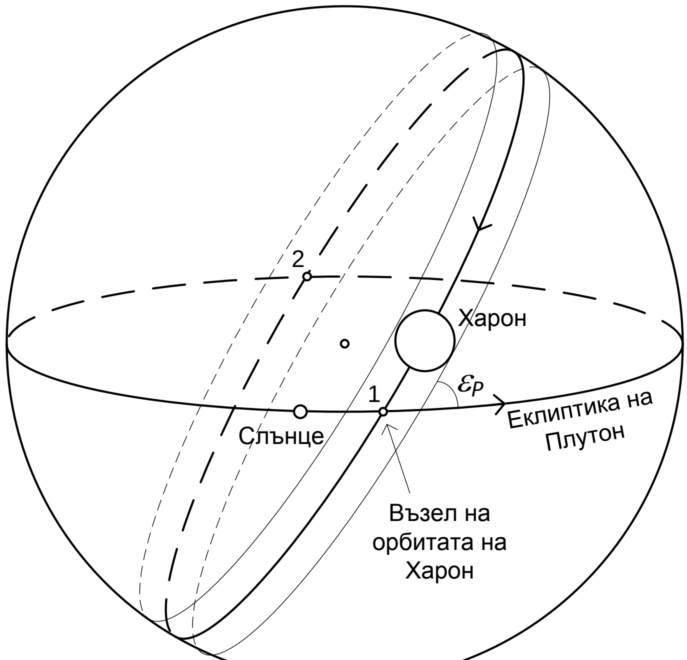
$$\Delta t = T_0 \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

$$\Delta t \approx 0.06679^d \approx 1.603\ \mathrm{h} \approx 96\ \mathrm{min}$$

При определяне на продължителността на централното затъмнение пренебрегваме компонентата във видимото движението на Слънцето, която е следствие от движението на Плутон по неговата орбита, защото тя е несъизмеримо по-малка от видимото движение на Харон, относно звездите и диска на Слънцето – почти 15000 пъти, както се вижда от отношението на периодите на Плутон и Харон.

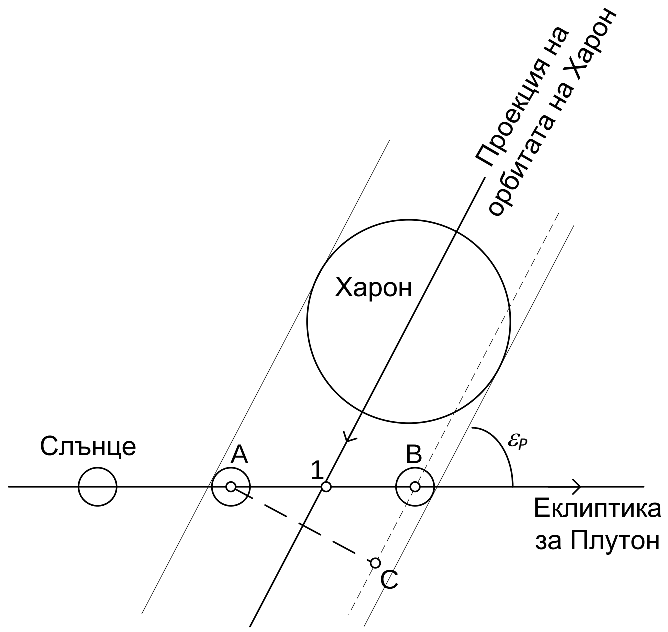
За да се случват слънчеви затъмнения е необходимо при фаза на Харон близка до новолуние Слънцето да се намира достатъчно близо до правата линия, в която се пресичат равнините на орбитата на Харон около Плутон и на орбитата на Плутон около Слънцето. Ако проектираме всичко това върху небесната сфера, то Слънцето трябва да е близо до някой от възлите на орбитата на Харон. Това са пресечните точки между проекцията на орбитата на Харон около Плутон върху небесната сфера и проекцията на орбитата на Плутон около Слънцето (еклиптиката за Плутон). Означаваме с ε_P дадения ни наклон на екваториалната равнина на Плутон към равнината на орбитата му около Слънцето. Това е и ъгълът между орбиталната равнина на Харон около Плутон и орбиталната равнина на Плутон около Слънцето, защото орбитата на приливно заключения Харон е екваториална.

На схемата е представена небесната сфера за наблюдател на Плутон. Дадена е проекцията на орбитата на Плутон около Слънцето – еклиптиката за Плутон, а също и проекцията на орбитата на Харон около Плутон.



Изображението на Харон дава представа за ивицата от небесната сфера, върху която трябва да попадне изцяло Слънцето при своето видимо годишно движение, за да има пълни слънчеви затъмнения. Вижда се, че такива периоди се случват два пъти по време на годината за

Плутон – около двата възела 1 и 2 на орбитата на Харон. Следващата схема показва в увеличен вид областта около възела 1 на орбитата на Харон.



Виждаме, че пълни слънчеви затъмнения ще могат да се случват в интервала от време, за който центърът на Слънцето изминава разстоянието AB по своя видим годишен път по еклиптиката за Плутон. Ъгловият размер на отсечката AC е равен на видимия ъглов диаметър на Харон минус видимия ъглов диаметър на Слънцето:

$$\mathrm{AC} = \delta_C - \delta_S$$

В триъгълника ABC:

$$\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin \varepsilon_P}$$

$$\mathrm{AB} \approx 4.465°$$

Този участък от еклиптиката за Плутон се изминава от Слънцето за време:

$$\Delta t_1 = T \cdot \frac{AB}{360°}$$

където T е орбиталният период на Плутон около Слънцето.

$$\Delta t_1 \approx 1123 \text{ дни} \approx 3 \text{ години}$$

За да проверим колко слънчеви затъмнения могат да се случат за този интервал от време, трябва да го разделим на орбиталния период на Харон (равен на периода на околоосно въртене на Плутон):

$$N = \frac{\Delta t_1}{T_0} \approx 175.84 \text{ пълни слънчеви затъмнания}$$

Като се има предвид, че в областта около другия възел на орбитата на Харон трябва да се случат още толкова затъмнения, то общият брой пълни слънчеви затъмнения, които ще могат да се наблюдават в рамките на една година за Плутон, ще бъде:

$$2N = 351.67 \text{ затъмнения}$$

Следователно за една плутонианска година на Плутон ще се виждат 351 или 352 пълни слънчеви затъмнения.

<u>Критерии за оценяване (общо 15 т.)</u>

За верен отговор колко спътника ще виждаме, когато всички се наредят на една права линия, както и кратко обяснение – 2 т.

За намиране на периода, през който се случва всичките спътници да застанат на една права линия от едната страна на Плутон – 3 т.

За определяне на продължителността на пълната фаза на затъмнението – 5 т.

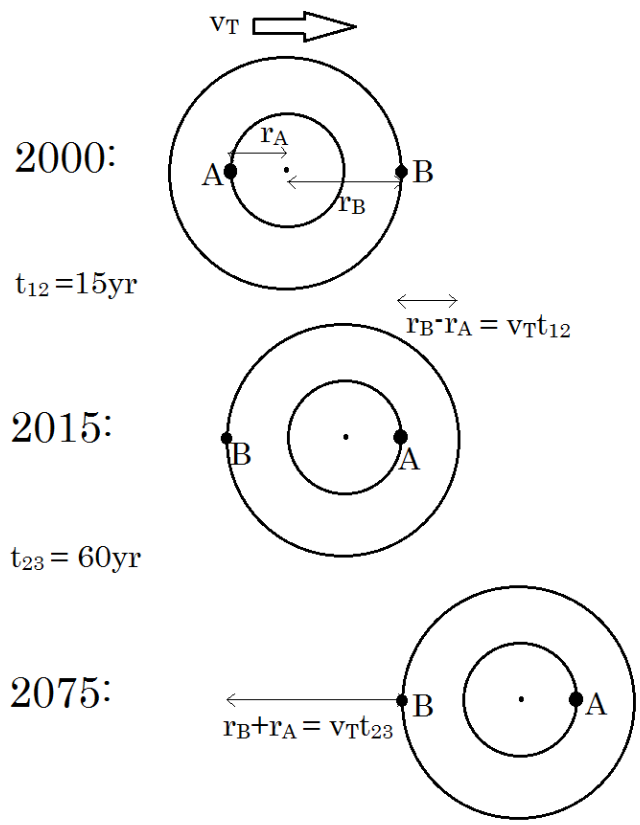
За определяне на броя затъмнения в годината – 5 т.

3 задача. Астрометрия на двойна звезда. Хипотетична двойна звезда има компоненти A и B, които се движат около общия си център на масите по кръгови орбити и винаги са на еднакво ъглово разстояние една от друга по небето. Компонентата A е по-масивната от двете.

- **А)** Определено е било положението на двете компоненти на звездното небе за януари 2000 г.. През януари 2015 г. двете звезди са си разменили местата относно фона на далечните звезди – звездата A се наблюдава точно на мястото на звездата B от 2000 г., а звездата B е точно в положението на звездата A от 2000 г. През януари 2075 г. компонентата B отново ще бъде точно в първата си позиция от януари 2000 г. Какво е отношението на масите на звездите M_B/M_A?
- **Б)** Ъгловото разстояние между двете компоненти винаги е равно на 0.25”, а разстоянието от Земята до двойната система е 102 парсека. Намерете масите на двете звезди M_A и M_B.

Решение:

А) Компонентите A и B са винаги на еднакво ъглово разстояние, следователно орбитите им лежат в равнина, перпендикулярна на зрителния лъч от земния наблюдател. Всички наблюдения са през януари и Земята е в едно и също положение по орбитата си, така че паралактичното отместване на системата не играе роля при разглежданите ситуации.



През 2015 г. двете компоненти са си разменили местата спрямо положенията, в които са били в 2000 г. Оттук следва, че интервалът от 15 години е кратен на цяло число орбитални периоди на системата плюс още половин период. Между 2015 г. и 2075 г. има 60 години и очевидно това е интервал, кратен на цяло число орбитални периоди на двойната система. Всичко това означава, че ако двете звезди бяха с равни маси и следователно, равноотдалечени от общия си център на масите, то през 2075 г. звездата B трябваше да се наблюдава на фона на далечните звезди точно в същото положение, в което е била в 2015 г. Случаят не е такъв и от това следва първо, че звездите не са с равни маси, и второ, че трябва да отчетем собственото движение на системата. При това тангенциалната скорост на двойната система спрямо Слънцето v_T е насочена точно по линията AB от 2000 г., за да се компенсират перфектно промените в положенията на звездите A и B през 2015 г. Да означим с r_A и r_B разстоянията на компонентите A и B до центъра на масите. От чертежа се вижда, че от 2000 г. за време t_{12} = 15 години системата при собственото си движение на фона на далечните звезди изминава път $r_B - r_A$, а за време t_{23} = 60 години след това – път $r_B + r_A$.

Следователно:

$$r_B - r_A = v_T t_{12}$$
$$r_B + r_A = v_T t_{23}$$

Делим тези равенства почленно:

$$\frac{r_B - r_A}{r_B + r_A} = \frac{t_{12}}{t_{23}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1 - r_A/r_B}{1 + r_A/r_B} = \frac{1}{4}$$

За масите и разстоянията до центъра на масите е в сила съотношението:

$$M_A r_A = M_B r_B$$

Отношението на масите ще бъде:

$$q = M_B/M_A = r_A/r_B$$

Оттук получаваме:

$$(1-q)/(1+q) = 1/4$$

$$q = 0.6$$

Б) От съображенията в подусловие А) излиза, че $t_{12} = kP/2$, където k = 1,3,5… е нечетно положително число. Можем да запишем III Закон на Кеплер:

$$\frac{(r_A + r_B)^3}{P^2} = \frac{G(M_A + M_B)}{4\pi^2}$$

където G е гравитационната константа.

Разстоянието до звездата е d = 102 pc, а радиусът на относителната орбита се вижда под ъгъл δ = 0.25”. Произведението $d.\delta$ по принцип се равнява на разстоянието между компонентите $r_B + r_A$ Ако разстоянието d е изразено в парсеци, а ъгловото разстояние δ е в дъгови секунди, то разстоянието между компонентите ще се получи в астрономически единици. Тогава ако в III закон на Кеплер заместим $(r_A + r_B) = d\delta$ = 25.5 AU и $P = 2t_{12}/k$, като периодът е в земни години, то формулата може да придобие вида:

$$\frac{(d\delta)^3}{P^2} = M_A + M_B$$

където масите са изразени в слънчеви маси. Така получаваме:

$$M_A + M_B = \frac{k^2 (d\delta)^3}{4{t_{12}}^2}$$

За k = 1 масата на системата е ($M_A + M_B$) = 18.3 M слънчеви маси.

За k = 3 масата на системата е ($M_A + M_B$) = 165 M слънчеви маси.

За k = 5 масата на системата е ($M_A + M_B$) = 458 M слънчеви маси, което вече е прекалено много, защото звездите с маси над ~150 слънчеви маси не са стабилни.

Двата възможни отговора са:

1) $M_A = 11.4$ и $M_B = 6.9$ слънчеви маси

2) $M_A = 103$ и $M_B = 62$ слънчеви маси

Системата е хипотетична – няма звезда със 100 слънчеви маси само на 100 pc от нас.

Критерии за оценяване (общо 15 т.)

За правилни съображения относно посоката на собствено движение на системата и обяснение на наблюдаваните положения на звездите в трите момента от време – 3 т.

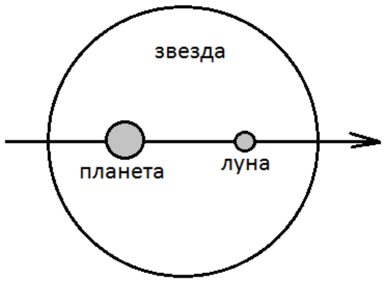
За правилен математически метод и числено пресмятане на отношението на масите на двете компоненти – 4 т.

За правилен алгебричен начин за определяне на сумата от масите на звездите – 2 т.

За разглеждане на различните математически допустими случаи и числено пресмятане на масите на компонентите – 4 т.

За избиране на случаите, които са допустими от астрофизическа гледна точка – 2 т.

4 задача. Екзопланета с екзолуна. Най-много от откритията на екзопланети в днешно време са направени по метода на пасажите – чрез проследяване на лекото намаление на блясъка на дадена звезда при преминаване на планетата пред нея. На последната фигура след задачите виждате криви на блясъка на звезда по време на пасажи на нейната планета. Те не отразяват реални наблюдения, а са компютърни симулации, основани на хипотетична звезда и планета. Планетата има спътник. В някои интервали блясъкът на звездата отслабва поради пасаж едновременно и на планетата, и на нейния спътник, а понякога спътникът преминава пред или зад планетата. Орбитите на планетата около звездата и на спътника около планетата са кръгови и лежат в една равнина. В същата равнина лежи и зрителният лъч от земния наблюдател. По вертикалната ос е отбелязан относителният светлинен поток, създаван от звездата по време на пасажа, като светлинният поток във времето извън пасажа се приема за равен на 1. Показани са шест криви на блясъка за шест последователни пасажа, като графиките от втория до шестия пасаж са изместени с 0.0025 единици поток вертикално надолу, за да се наредят една под друга.



- А) Нарисувайте схематично взаимното разположение на екзопланетата, екзолуната и видимия диск на звездата за моментите, обозначени върху кривите на блясъка с точките A, B, C и D. Имайте предвид, че екзолуната има много кратък орбитален период около екзопланетата – само 0.3142 денонощия. Вляво виждате примерна рисунка. Движенията на планетата около звездата и на спътника около планетата стават в една и съща посока.

Симулацията е направена при предположение, че звездата има маса 0.40 слънчеви маси и радиус 0.50 слънчеви радиуса.

- Б) Направете необходимите измервания и определете радиусите на планетата и на нейния спътник. Определете радиуса на орбитата на планетата около звездата и нейния орбитален период.
- В) Определете приблизително радиуса на орбитата на спътника около планетата и масата на планетата.

Заоблянето на кривите на блясъка се дължи на потъмнение към края на диска на звездата. Не отчитайте този ефект при определяне на радиуса на планетата.

Справочни данни:

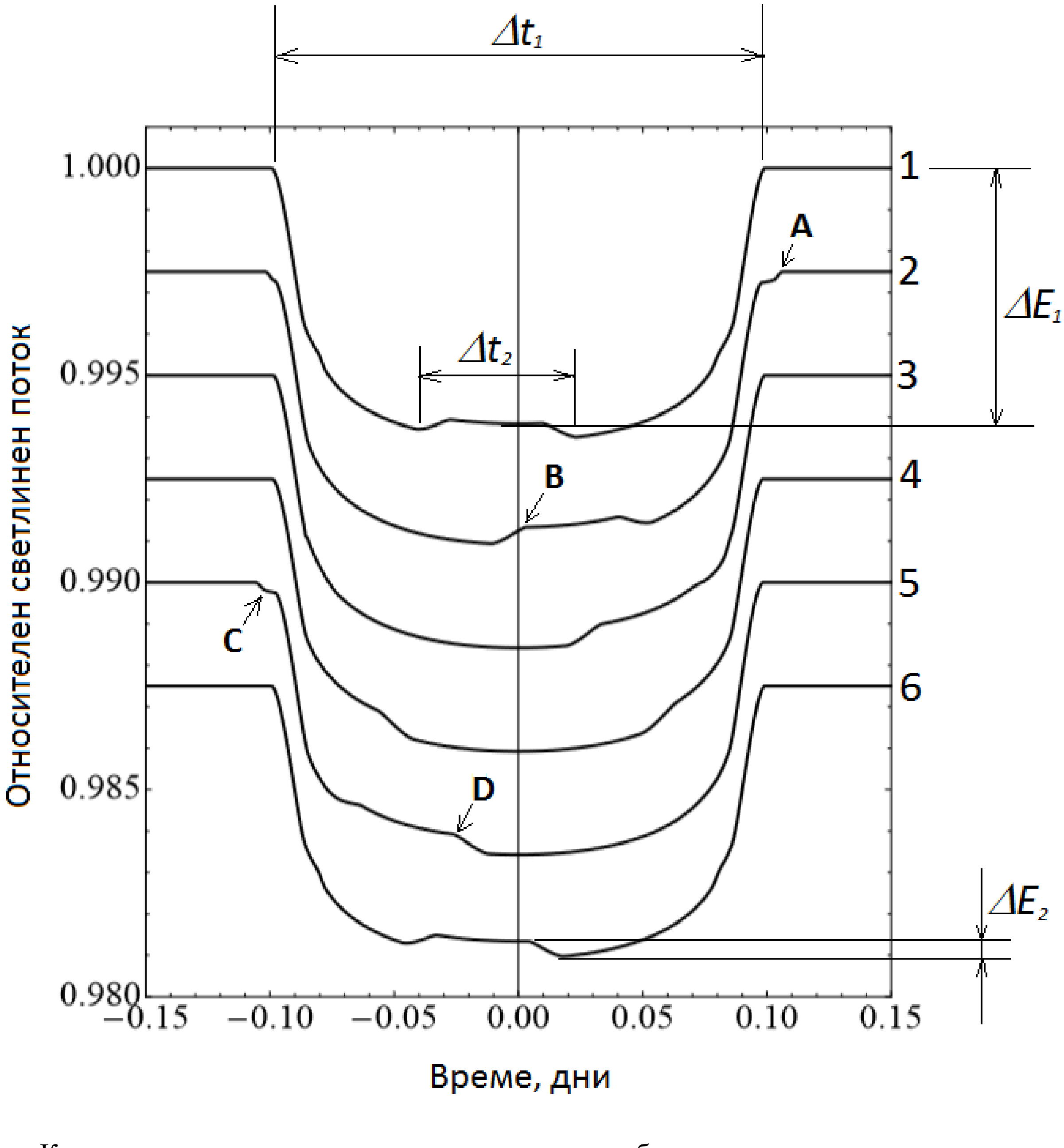
Маса на Слънцето – 2×10^{30} kg

Радиус на Слънцето – 696 000 km

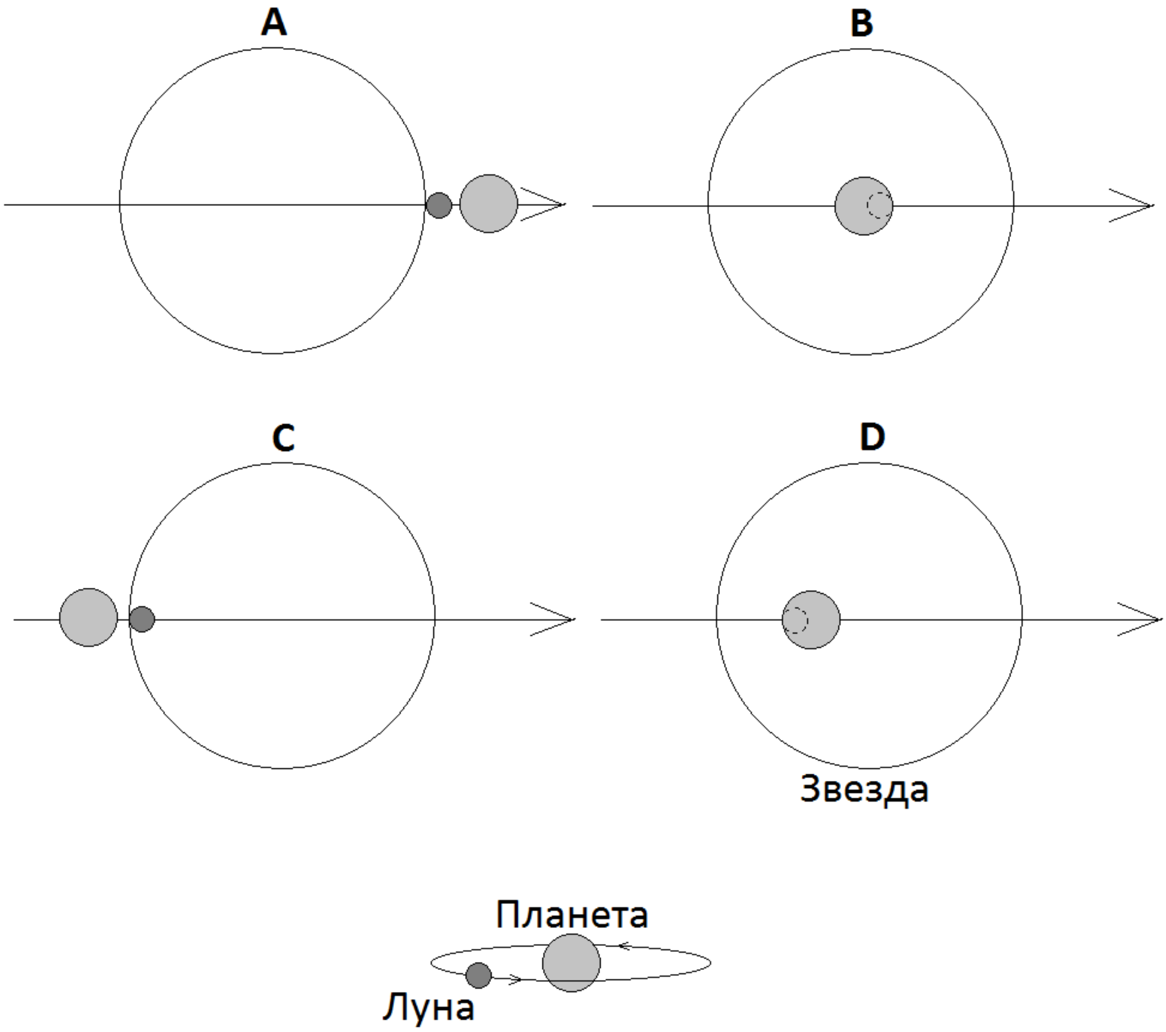
Гравитационна константа – 6.67×10^{-11} m^3/kg.s^2

Решение:

Номерираме шестте криви на блясъка на звездата по време на пасажите на планетата с цифрите от 1 до 6. Лесно можем да забележим, че от началото до края на пасажа на планетата по видимия диск на звездата изминава време около 0.2 от денонощието. А орбиталният период на екзолуната около планетата е $T_L = 0.3142$ денонощия, което е малко повече от времетраенето на пасажа на планетата. Участъкът от първата крива на блясъка, чиято продължителност е означена с Δt_2 на фигурата по-долу, съответства на интервал от време, през който екзолуната преминава или точно пред екзопланетата, или точно зад нея, при което не закрива светлина от звездата и блясъкът на звездата леко се повишава. Подобни участъци има и при другите криви на блясъка на звездата по време на другите пасажи на екзопланетата.



Като имаме предвид всичко това, а също и че орбиталното движение на планетата около звездата и движението на луната около планетата са в една и съща посока, можем да си представим какво е било взаимното разположение на трите тела в моментите, обозначени с A, B, C и D. То е показано на следващата фигура.



Точка A съответства на момент, в който пасажът на планетата е приключил съвсем наскоро, а пасажът на луната пред диска на звездата тъкмо завършва. Това е моментът, в който видимият диск на луната излиза напълно от рамките на видимия диск на звездата и престава да я затъмнява.

Точка B съответства на момент близък до централния момент на пасажа на планетата по диска на звездата. Този момент предшества момента, означен с точка A, когато луната е била вляво от планетата. Следователно в момента B тъкмо е започвало навлизането на луната в зоната зад видимия диск на планетата, поради което част от светлината на звездата вече се закрива само от планетата, но не и от луната и общият блясък на звездата леко се повишава.

Точка C съответства на момент, когато пасажът на планетата още не е започнал, но луната тъкмо е навлязла изцяло пред видимия диск на звездата и причинява леко намаляване на нейния блясък.

След като в момента, означен с точка C, луната е била вдясно от планетата, то по-нататък предстои преминаването ѝ зад планетата. Затова точка D съответства на момент преди средата на пасажа на планетата по диска на звездата, когато луната започва да излиза иззад диска на планетата.

Чрез измерване определяме мащаба на скалата по вертикалната ос на графиките. На 0.02 относителни единици светлинен поток съответстват 139.5 mm. Измерваме намалението на блясъка на звездата ΔE_1 по време на първия пасаж, в рамките на интервала, когато луната е скрита зад планетата и не внася допълнително намаляване на блясъка. Можем да го измерим и по шестия пасаж. То се оказва равно на 43 mm и като използваме мащаба, получаваме:

$$\Delta E_1 = 43\ \text{mm} \cdot \frac{0.02}{139.5\ \text{mm}} \approx 0.006165\ \text{отн. ед.}$$

Приемаме приблизителен модел, при който разглеждаме звездата като равномерно светещ диск с радиус R_S, част от който се закрива от тъмния диск на планетата с радиус R_P. (*Значителна част от неточността на този модел е свързана с потъмняването към крайщата на видимия диск на звездата. Заради него всъщност се наблюдава заоблянето в графиката при спадането на блясъка в началото на пасажа и при увеличението на блясъка в края. Ние оценяваме радиуса на планетата по максималната дълбочина на спадане на блясъка около централния момент на пасажа, но не отчитаме, че тогава планетата закрива най-ярката област от видимия диск на звездата. Поради това ние леко надценяваме радиуса на планетата. Но отчитането на този ефект е сложно и в задачата се изисква само приблизителна оценка*). Означаваме осветеността (или светлинния поток), създавана от звездата извън времето на пасажа, с E_0. В относителни единици $E_0 = 1$. В сила е съотношението:

$$\frac{E_0 - \Delta E_1}{E_0} = \frac{\pi {R_S}^2 - \pi {R_P}^2}{\pi {R_S}^2}$$

Оттук, като имаме предвид дадения ни радиус на звездата, получаваме:

$$R_P = R_S \sqrt{\frac{\Delta E_1}{E_0}}$$

$$R_P \approx 27\ 300\ \text{km}$$

Тази планета е сравнима по размери с планетите Уран и Нептун.

Измерваме лекото повишение на блясъка на звездата ΔE_1 близо до централния момент на някой от пасажите, в интервала когато луната се скрива зад планетата или преминава пред нея. За тази цел можем да използваме първия или шестия пасаж. Измерваме повишението на блясъка по графиката и то се оказва равно на 2.3 mm. Отново използваме мащаба и получаваме:

$$\Delta E_2 = 2.3\ \text{mm} \cdot \frac{0.02}{139.5\ \text{mm}} \approx 0.0003297\ \text{отн. ед.}$$

Означаваме с R_L радиуса на луната и намираме:

$$\frac{E_0 - \Delta E_1 - \Delta E_2}{E_0 - \Delta E_1} = \frac{\pi {R_S}^2 - \pi {R_P}^2 - \pi {R_L}^2}{\pi {R_S}^2 - \pi {R_P}^2}$$

$$R_L = \sqrt{\left({R_S}^2 - {R_P}^2\right) \cdot \frac{\Delta E_2}{E_0 - \Delta E_1}}$$

$$R_L \approx 6500\ \text{km}$$

Екзолуната е сравнима по размери с нашата Земя.

За да определим радиуса на орбитата на планетата около звездата, ще си послужим с още едно доста силно приближение. Ще считаме, че участъкът от нейната орбита, по време на който се наблюдава пасаж на планетата пред диска на звездата, е почти праволинеен. (*В действителност той е дъга от окръжността, описвана от планетата около звездата. Приближението може да се допусне, ако радиусът на орбитата на планетата е многократно по-голям от радиуса на звездата*). Да определим времетраенето на пасажа на планетата по диска на звездата. За целта изчисляваме мащаба на хоризонталната ос. Чрез измерване можем да се убедим, че интервал от 0.2 денонощия отговаря на 83.5 mm по скалата на времето. Измерваме времетраенето на пасажа на планетата Δt_1 върху графиката. То се оказва равно на 82.5 мм. Като използваме мащаба, получаваме:

$$\Delta t_1 = 82.5\ \mathrm{mm} \cdot \frac{0.2\ \text{денонощия}}{83.5\ \mathrm{mm}} \approx 0.1976\ \text{денонощия}$$

В този интервал се включва времето за постепенното навлизане на планетата пред диска на звездата, преминаването на центъра на планетата по диаметъра на диска на звездата и постепенното излизане на планетата. Следователно общото разстояние, изминато то планетата, ще бъде равно на $R_P + 2R_S + R_P = 2(R_S + R_P)$. Скоростта на планетата ще бъде:

$$v_P = \frac{2(R_S + R_P)}{\Delta t_1}$$

$$v_P \approx 43.97\ \mathrm{km/s}$$

Означаваме радиуса на орбитата на планетата около звездата с r_P, а масата на звездата с M_S. Тъй като планетата се движи по кръгова орбита около звездата, то можем да използваме формулата за кръгова скорост:

$$v_P = \sqrt{\frac{\gamma M_S}{r_P}}$$

където γ е гравитационната константа. Оттук получаваме:

$$r_P = \frac{\gamma M_S}{{v_P}^2}$$

$$r_P \approx 27.6 \times 10^6\ \mathrm{km}$$

Орбиталният период на планетата около звездата ще бъде:

$$T_P = \frac{2\pi r_P}{v_P}$$

$$T_P \approx 3.94 \times 10^6\ s \approx 45.6\ \text{денонощия}$$

Радиуса на орбитата на луната около планетата r_L определяме по аналогичен начин. Измерваме интервала от време Δt_2, през който луната преминава пред или зад планетата по време на пасаж. Можем да използваме първия или шестия пасаж. Измерването върху графиката показва, че този интервал е равен на 25.5 mm. С помощта на мащаба получаваме:

$$\Delta t_2 = 25.5\ \mathrm{mm} \cdot \frac{0.2\ \text{денонощия}}{83.5\ \mathrm{mm}} \approx 0.06108\ \text{денонощия}$$

Означаваме с v_L скоростта на луната и пресмятаме:

$$v_L = \frac{2(R_P + R_L)}{\Delta t_2}$$

$$v_L \approx 12.82\ \mathrm{km/s}$$

Орбиталният период на луната около планетата T_L ни е даден и за радиуса на орбитата на луната можем да напишем:

$$r_L = \frac{v_L T_L}{2\pi} \approx 55\ 400\ \mathrm{km}$$

Полученият орбитален радиус на луната е само около два пъти по-голям от радиуса на планетата. В действителност такава система трудно би могла да съществува, тъй като при това близко разстояние луната би се разрушила от приливното въздействие на планетата. Но тук става въпрос за хипотетична планета със спътник и при възприетата хипотеза, стояща в основата на компютърната симулация, не е отчетен този ефект. Освен това нашето пресмятане е твърде неточно, защото в такъв случай трудно може да се приеме приближението, че по време на преминаването си пред или зад планетата нейният спътник описва линия близка до отсечка от права линия. Но от нас се иска да направим само приблизителна оценка на търсените величини.

За да намерим масата на планетата M_P използваме III закон на Кеплер:

$$\frac{{r_L}^3}{{T_L}^2} = \frac{\gamma M_P}{4\pi^2}$$

$$M_P = \frac{4\pi^2 {r_L}^3}{\gamma {T_L}^2}$$

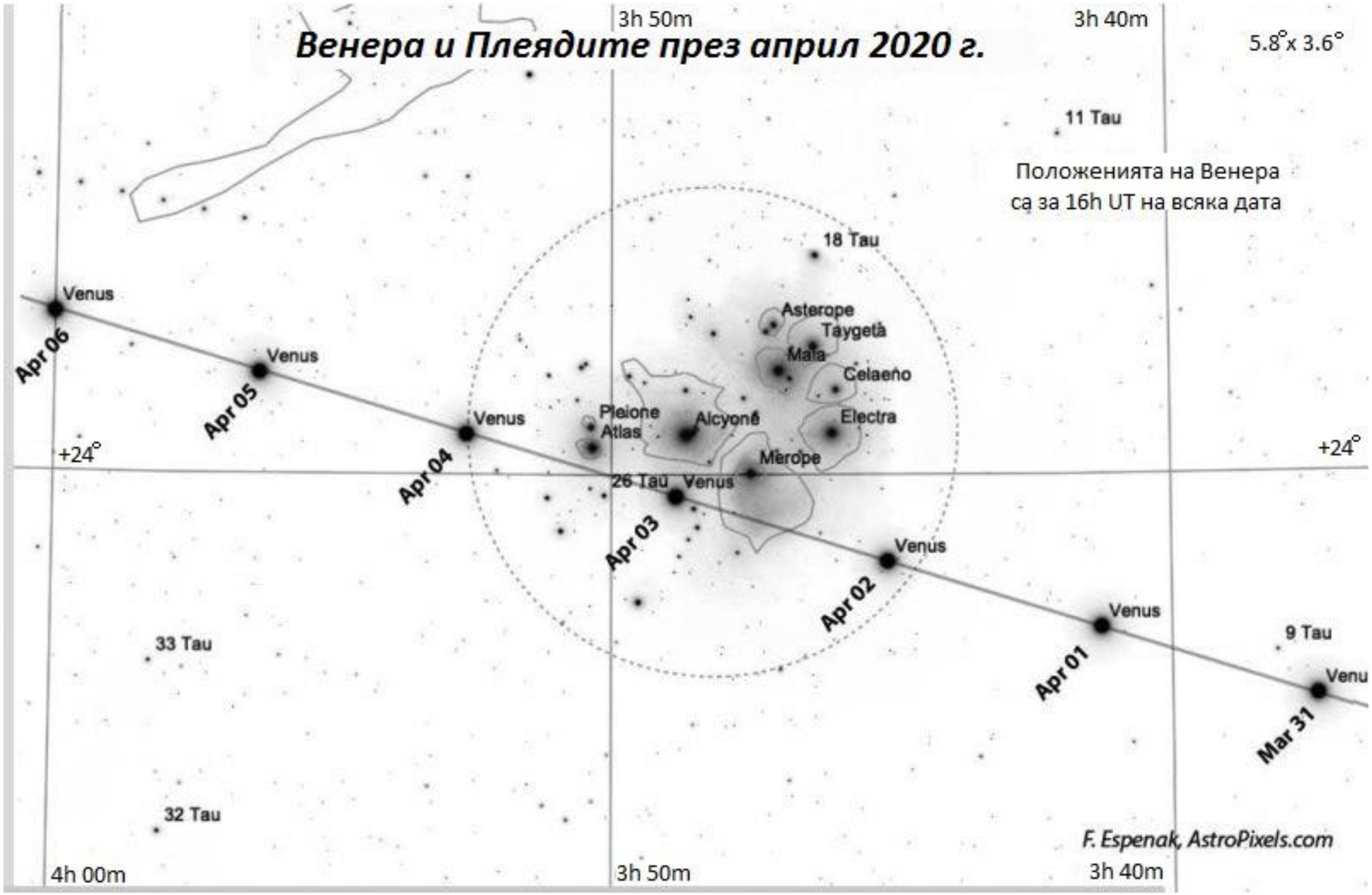
$$M_P \approx 1.4 \times 10^{26}\ \mathrm{kg}$$

Масата на планетата е сравнима с масата на Нептун.

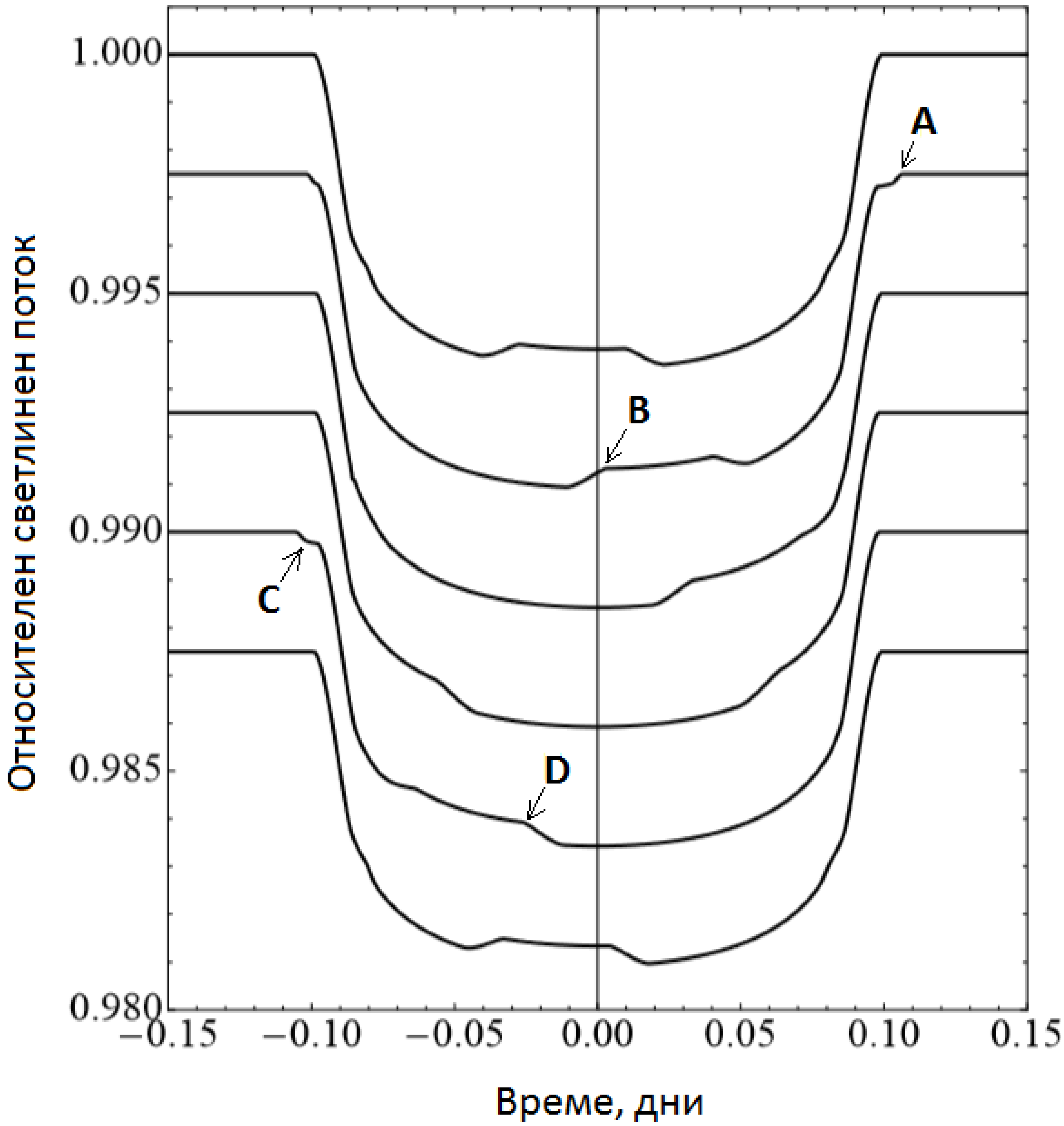
В компютърната симулация са заложени следните начални условия: планетата е с масата и радиуса на Нептун, спътникът е с масата и радиуса на Земята, радиусът на неговата орбита е около два пъти по-голям от радиуса на планетата, орбиталният период на планетата около звездата е 46 дни. Както се вижда, получените от нас резултати са доста близки до тези параметри.

<u>Критерии за оценяване (общо 15 т.):</u>

За правилни схеми на разположението на телата в моментите A, B, C, D – 4 т.
За правилен теоретичен метод за определяне на радиуса на планетата – 2 т.
За измервания, пресмятания и верен числен резултат – 1.5 т.
За определяне на орбиталния период на планетата – 2 т.
За правилен теоретичен метод за определяне на радиуса на спътника – 2 т.
За измервания, пресмятания и верен числен резултат – 1.5 т.
За определяне на масата на планетата – 2 т.



Пътят на Венера – към задача 1.



Пасажи на планета със спътник по диска на звезда – към задача 4.